第一章
极限、连续

第一节　函　数

函数

内容提要

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域、函数值及表达式，会求分段函数的定义域、函数值，会画分段函数的图像.

2. 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性，会判断函数的奇偶性.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像)，会求单调函数的反函数.

4. 熟练掌握函数的四则运算与复合运算，会分解复合函数.

5. 了解初等函数的概念，熟练掌握基本初等函数的性质及其图像.

基础知识精讲

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义　设 A，B 都是非空的数的集合，f：$x\to y$ 是从 A 到 B 的一个对应法则，那么从 A 到 B 的映射 f：$A\to B$ 就叫做**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$，原象集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的**定义域**，象集合 B 叫做函数 $f(x)$ 的**值域**.

符号 $y=f(x)$ 即是“y 是 x 的函数”的数学表示，应理解为：x 是**自变量**，它是法则所施加的对象；f 是**对应法则**，它可以是一个或几个解析式，可以是图像、表格，也可以是文字描述；y 是自变量的**函数**，当 x 为允许的某一具体值时，相应的 y 值为与该自变量值对应的函数值，当 f 用解析式表示时，则解析式为函数解析式. $y=f(x)$ 仅仅是函数符号，不是表示“y 等于 f 与 x 的乘积”，$f(x)$ 也不一定是解析式. 在研究函数时，除用符号 $f(x)$ 外，还常用 $g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ 等符号来表示.

由函数的定义可知，函数含有三个要素：定义域 A、值域 B 和对应法则 f. 其中核心是对应法则 f，它是函数关系的本质特征. $y=f(x)$ 的意义是：y 等于 x 在法则 f 下的对应值，而 f 是“对应”得以实现的方法和途径，是联系 x 与 y 的纽带，所以是函数的核心. 至于

用什么字母表示自变量、因变量和对应法则，这是无关紧要的.

函数的定义域(即原象集合)是自变量 x 的取值范围，它是构成函数的一个不可缺少的组成部分. 当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则完全确定之后，函数的值域也就随之确定了. 因此，定义域和对应法则为“y 是 x 的函数”的两个基本条件，缺一不可. 只有当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数，这就是说：

(1)定义域不同，两个函数也就不同；

(2)对应法则不同，两个函数也是不同的；

(3)即使是定义域和值域都分别相同的两个函数，它们也不一定是同一函数，因为函数的定义域和值域不能唯一地确定函数的对应法则.

2. 函数的表示方法

函数的表示方法有**解析法**、**列表法**和**图像法**.

(1)**解析法**就是把两个变量的函数关系，用一个数学表达式表示出来，这个表达式叫做函数的解析表达式，简称**解析式**.

(2)**列表法**就是列出表格来表示两个变量之间的函数关系.

(3)**图像法**就是用函数的图像表示两个变量之间的函数关系.

3. 函数解析表示法中常见的几种形式

(1)**显函数**：由关系式 $y=f(x)$确定 y 是 x 的函数，称为**显函数**.

(2)**隐函数**：由方程 $F(x, y)=0$ 确定的函数关系 $y=f(x)$，称为**隐函数**.

注意：并非所有隐函数都可以转化为显函数.

(3)**分段函数**：对于自变量 x 的不同的取值范围，有着不同的对应法则，这样的函数通常叫做**分段函数**. 它是一个函数，而不是几个函数. 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，值域也是各段函数值域的并集.

例如：

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

其表示的含义为：当 $0<x<1$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$；当 $x\geqslant 1$ 时，$y=x$.

注意：

(1)分段函数是一个函数，不要把它误认为是几个函数；

(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集，值域是各段值域的并集；

(3)分段函数的图像是由几个不同的部分组成，作分段函数的图像时，应根据不同定义域上的不同解析式分别作出.

4. 函数的定义域

函数的定义域是指函数有定义的、自变量 x 所允许的取值范围，因此求定义域常常是排除那些使函数没有定义的点.

求定义域的三种基本方法：

(1)依据函数解析式中所包含的运算规则(除法、开平方等)对自变量的制约要求，通过

解不等式(组)求得定义域；

(2)依据确定函数 $y=f(x)$的对应法则 f 对作用对象的取值范围的制约要求，通过解不等式(组)求得定义域；

(3)根据问题的实际意义，规定自变量的取值范围，求得定义域.

如果函数是由一些基本函数通过四则运算构成的，那么它的定义域是使各个部分都有意义的 x 值组成的集合. 对含参数的函数求定义域(或已知定义域，求字母参数的取值范围)时，必须对参数的取值进行讨论.

当函数由实际问题给出时，其定义域由实际问题确定.

二、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$在区间 D 内有定义，且 D 关于原点对称，若任取 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$在区间 D 内为**偶函数**.

若任取 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$在区间 D 内为**奇函数**.

注意：

(1)判断函数定义域 D 关于原点是否对称是判断函数奇偶性的前提条件，因此判断一个函数的奇偶性应首先判断定义域是否关于原点对称，然后求 $f(x)$.

(2)如果函数 $y=f(x)(x\in D)$是奇函数，那么 $y=f(x)$的图像关于原点为中心对称. 如果函数 $y=f(x)(x\in D)$为偶函数，那么 $y=f(x)$的图像关于 y 轴对称.

(3)常数函数 $f(x)=c(x\in \mathbf{R})$一定是偶函数；若 $c=0$，则 $f(x)$既是偶函数又是奇函数.

(4)偶函数与偶函数的和函数是偶函数，奇函数与奇函数的和函数是奇函数；偶函数与偶函数的积函数是偶函数，偶函数与奇函数的积函数是奇函数，奇函数与奇函数的积函数是偶函数.

2. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 $T(T>0)$，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有$f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为**周期函数**，T 为这个函数的**周期**.

如果 $f(x)$存在周期，一般指的是最小正周期. 周期函数在各个周期内的图形是相同的.

3. 有界性

如果在变量 x 的取值范围(用 D 表示)内，存在一个正数 M，使在 D 上的函数值$f(x)$都满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$在 D 上有界，亦称 $f(x)$在 D 上是**有界函数**. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$在 D 上无界，亦称 $f(x)$在 D 上是**无界函数**.

一般来说，连续函数在闭区间上具有有界性.

例如：$y=x+6$ 在$[1,2]$上有最小值 7，最大值 8，即它的函数值在 7 和 8 之间变化，是有界的，所以函数 $y=x+6$ 在$[1,2]$上具有有界性.

4. 单调性

一般地，设函数 $f(x)$的定义域为 I：

如果对于属于 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<$

$f(x_2)$，那么就说 $f(x)$在这个区间上是**增函数**.

如果对于属于 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么就说 $f(x)$在这个区间上是**减函数**.

若函数 $y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，则函数在这一区间具有(严格的)**单调性**，这一区间叫做函数的**单调区间**. 此时也说函数是这一区间上的**单调函数**.

在单调区间上，增函数的图像是上升的，减函数的图像是下降的.

减(增)函数与减(增)函数的和为减(增)函数;

增(减)函数与减(增)函数的差为增(减)函数.

三、反函数

1. 反函数的定义

定义 设函数 $y=f(x)(x\in A)$的值域是 C，根据函数中 x 与 y 的关系，用 y 表示 x，得到 $x=g(y)$. 若对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x=g(y)$，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么，$x=g(y)$就表示 y 是自变量，x 是因变量，x 是 y 的函数，这样的函数 $x=g(y)(y\in C)$叫做函数 $y=f(x)(x\in A)$的**反函数**，记作 $y=f^{-1}(x)$. 反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域、值域分别是函数 $y=f(x)$的值域、定义域.

2. 反函数存在定理

如果函数 $y=f(x)$是严格单调增加(或减少)的，则它必定存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，并且也是严格单调增加(或减少)的.

3. 求反函数的步骤

令 $f(x)=y$，根据函数式导出 x 关于自变量 y 的函数式.

由于通常是以 x 表示自变量，y 表示函数. 所以把导出的函数式自变量换成 x，函数换成 y，即得到原函数的反函数.

注意:

(1)互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)在函数 $x=f^{-1}(y)$中，y 是自变量，x 是函数，但习惯上，我们一般用 x 表示自变量，用 y 表示函数，为此我们常常对调函数 $x=f^{-1}(y)$中的字母 x，y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$. 今后凡无特别说明，函数 $y=f(x)$的反函数都采用这种经过改写的形式.

(3)反函数也是函数，因为它符合函数的定义. 从反函数的定义可知，对于任意一个函数 $y=f(x)$来说，不一定有反函数，若函数 $y=f(x)$有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$是唯一的，这就是说，函数 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.

(4)互为反函数的两个函数在各自定义域内有相同的单调性. 严格单调函数才有反函数，如二次函数在 $\mathbf{R}$ 内没有反函数，但在其单调增(减)的定义域内，可以求得反函数.

四、复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 设 $y=f(u)$的定义域为 D_u，值域为 M_u，函数 $u=g(x)$的定义域为 D_x，值域为

M_x，那么对于 D_x 内的任意一个 x，经过 u 有唯一确定的 y 值与之对应，因此变量 x 与 y 之间通过变量 u 形成一种函数关系，记为 $y=f[g(x)]$，这种函数称为**复合函数**，其中 x 称为自变量，u 为中间变量，y 为因变量(即函数).

注意：

(1)不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数，只有当 $M_x \cap D_u$ 不为空集时，二者才可以构成一个复合函数.

(2)设 $y=f(u)$的最小正周期为 T_1，$u=\varphi(x)$的最小正周期为 T_2，则 $y=f(u)$的最小正周期为 T_1T_2，任一周期可表示为 kT_1T_2(k 属于 $\mathbf{R}^+$).

(3)复合函数单调性由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$的增减性决定. 即“增增得增，减减得增，增减得减”，可以简化为“同增异减”.

2. 初等函数

初等函数是由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数与常数经过有限次的有理运算及有限次函数复合所产生，并且能用一个解析式表示的函数. 其中幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1)常值函数.

对定义域中的一切 x 对应的函数值都取某个固定常数的函数.

(2)幂函数.

形如 $y=x^a$ 的函数，式中 a 为实数.

(3)指数函数.

形如 $y=a^x$ 的函数，式中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

(4)对数函数.

指数函数的反函数，记作 $y=\log_a x$，式中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，定义域是 $x>0$. 指数函数与对数函数之间成立关系式为 $\log_a a^x=x$.

(5)三角函数.

正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

(6)反三角函数.

三角函数的反函数，包括反正弦函数 $y=\arcsin x\left(-1\leqslant x\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，反余弦函数 $y=\arccos x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$，反正切函数 $y=\arctan x\left(-\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ $(-\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi)$ 等.

典型例题解析

例 1　已知函数 $f(x)$的定义域为$(-1,0)$，则下列函数中定义域为$(0,1)$的是(　　).

A. $f(1-x)$　　　　B. $f(x-1)$

C. $f(x+1)$　　　　D. $f(x^2-1)$

答案：B

解析：A. $-1<1-x<0$，即 $1<x<2$，故 $f(1-x)$的定义域为$(1,2)$；

B. $-1<x-1<0$，即 $0<x<1$，故 $f(x-1)$的定义域为$(0,1)$；

C. $-1<x+1<0$，即$-2<x<-1$，故 $f(x+1)$的定义域为$(-2,-1)$；

D. $-1<x^2-1<0$，即$-1<x<0$ 或 $0<x<1$，故 $f(x^2-1)$的定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

例 2　下列函数为奇函数的是(　　).

A. $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　　　B. $f(x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}$

C. $f(x)=\dfrac{x(1+x)}{1-x}$　　　　D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}\sin x$

答案：B

解析：A. $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$为偶函数；

B. $f(-x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$为奇函数；

C. $f(x)$为非奇非偶函数；

D. $f(x)$满足 $f(-x)=\dfrac{|-x|}{-x}\sin(-x)=\dfrac{|x|}{x}\sin x=f(x)$为偶函数.

第二节　极　限

极限

内容提要

1. 理解极限的概念及“ξ-N”“ξ-δ”“ξ-M”. 会求函数在一点处的左极限与右极限，了解函数在一点处极限存在的充要条件.

2. 了解极限的性质，掌握极限的四则运算法则.

3. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价). 会运用等价无穷小量代换求极限.

4. 熟练掌握两个重要极限的应用.

基础知识精讲

一、数列的极限

1. 数列

定义　无穷多个数按一定顺序排列成 x_1，x_2，…，x_n，…的形式称为**数列**，记为$\{x_n\}$. 其中 x_n 称为数列的**通项**或一般项，正整数 n 称为数列的下标.

2. 数列极限

定义　已知数列$\{x_n\}$，当$n\to\infty$时，若存在常数A，使得x_n与A无限接近，则称常数A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A$（当$n\to\infty$时）. 没有极限的数列称为发散数列.

二、数列极限的性质与运算法则

性质1　有极限的数列，其极限值必唯一.

性质2　收敛数列一定有界，反之不成立，即有界数列不一定收敛.

1. 四则运算法则

设有数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$；

$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\cdot B$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

2. 夹逼定理

定理　若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足不等式$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

3. 单调有界数列极限存在定理

定理　若数列$\{y_n\}$单调有界，则它必有极限.

三、函数极限的概念

1. 定义　已知函数$f(x)$在点x_0的邻域有定义，当$x\to x_0$时，若存在常数A，使得$f(x)$与A无限接近，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A$（当$x\to x_0$时）.

2. 左、右极限及其与极限的关系

左极限　已知函数$f(x)$在点x_0左侧邻域有定义，当x从左侧趋近于x_0时，若存在常数A，使得$f(x)$与A无限接近，则称常数A为函数$f(x)$在x_0处的**左极限**，记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)=A$.

右极限　已知函数$f(x)$在点x_0右侧邻域有定义，当x从右侧趋向于x_0时，若存在常数A，使得$f(x)$与A无限接近，则称常数A为函数$f(x)$在x_0处的**右极限**，记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)=A$.

定理　函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于$A$的充分必要条件是左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在且等于$A$，即有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

3. $x\to\infty(x\to+\infty, x\to-\infty)$时函数的极限

定义 已知函数 $f(x)$在 **R** 内有定义，当 $x\to\infty$时，若存在常数 A，使得 $f(x)$与 A 无限接近，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to\infty$时).

定义 已知函数 $f(x)$在$(x_0, +\infty)$区间内有定义，当 $x\to+\infty$时，若存在常数 A，使得 $f(x)$与 A 无限接近，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to+\infty$时).

定义 已知函数 $f(x)$在$(-\infty, x_0)$区间内有定义，当 $x\to-\infty$时，若存在常数 A，使得 $f(x)$与 A 无限接近，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to-\infty$时).

定理 函数极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在且等于 A 的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在且都等于 A，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

4. 函数极限的几何意义

函数极限的几何意义如下：任意给定一正数 ε，作平行于 x 轴的两直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，介于这两条直线之间是一横条区域. 根据定义，对于给定 x_0，存在点 x_0 的一个 δ 邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，当 $y=f(x)$的图形上的点的横坐标 x 在邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内，但 $x\neq x_0$ 时，这些点的纵坐标 $f(x)$满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 或 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. 即这些点落在上面所作的横条区域内(如图 1-1 所示).

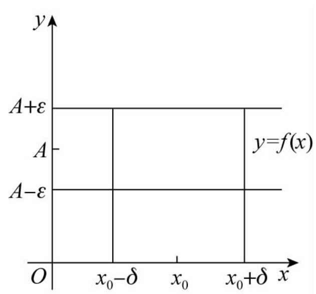

图 1-1

四、函数极限的性质

性质 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则这个极限唯一.

性质 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则必定存在 x_0 的某邻域，在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处，恒有 $f(x)>0$.

性质 3 若 $f(x)\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则必有 $A\geqslant 0$.

五、函数极限的四则运算法则

设有函数 $f(x)$，$g(x)$，如果在自变量 x 的同一变化过程中，有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$，则

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\pm B;$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

六、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量和无穷大量的定义

(1)无穷小量的定义.

在自变量 x 的某一变化趋势下，若函数 $f(x)$的极限为零，则称 x 为这一变化趋势下的**无穷小量**，简称**无穷小**. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0.$$

(2)无穷大量的定义.

在自变量 x 的某一变化趋势下，若函数 $f(x)$的绝对值无限地增大，则称函数 $f(x)$为**无穷大量**，简称为**无穷大**. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty.$$

2. 无穷小量和无穷大量的关系

(1)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

(2)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

3. 无穷小量的性质

性质 1　有限个无穷小量的和或差仍为无穷小量；

性质 2　有限个无穷小量的积仍为无穷小量；

性质 3　无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量；

性质 4　无穷小量除以有极限且极限不为零的变量，其商仍为无穷小量；

性质 5　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

4. 无穷小量的阶

设 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是关于自变量 x 在同一变化过程 $\begin{matrix}x\to x_0\\(x\to\infty)\end{matrix}$ 的两个无穷小量.

(1)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$比 $\beta(x)$为**高阶无穷小量**(或称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$低阶的无穷小量)；

(2)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$，则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是**同阶无穷小量**；

(3)若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是**等价无穷小量**，并记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

定理(无穷小量等价代换定理)　设 $\alpha(x)$，$\alpha'(x)$，$\beta(x)$，$\beta'(x)$是自变量 x 在同一变化

过程中的无穷小量，且 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，$\beta(x)\sim\beta'(x)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

常用的无穷小量等价代换 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$.

七、极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在准则

夹逼定理 设在 x_0 的某空心邻域内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注意： 此定理对 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$等函数极限，也有类似的结果.

2. 两个重要极限

$$\text{重要极限 I}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$\text{重要极限 II}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

八、求极限的方法

(1)极限定义(分段函数的分段点或者是函数间断点，常常要使用左、右极限).

(2)极限的四则运算法则(注意：必须首先满足定理条件，特别是求商的极限时，分母的极限不为零).

(3)夹逼准则(对数列、函数都成立).

(4)单调有界数列必收敛(仅对数列成立).

(5)两个重要极限

①$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$(属于 1^∞ 型)；

②$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$(属于$\dfrac{0}{0}$型).

(6)变量替换求极限(包括取对数后再求极限).

(7)利用有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小，以及无穷小与有界量的乘积仍为无穷小.

(8)利用无穷小与无穷大之间的关系求极限(例如：α 为无穷小且 $\alpha\neq 0$，则$\dfrac{1}{\alpha}$为无穷大).

(9)等价无穷小替换(这是求极限最重要的方法之一，特别要注意无穷小的和、差替换的条件是要替换的两个无穷小不能是等价无穷小).

典型例题解析

例 1　设 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$，则 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=$________.

答案：-4

解析：由题设条件，有

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-3)=-4.$$

例 2　已知当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $a=$________.

答案：2

解析：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2}{x^2(\sqrt{1+ax^2}+1)}=\dfrac{a}{2}=1$，得 $a=2$.

例 3　当 $x\to0$ 时，与 $e^{2x}-1$ 等价的无穷小量是(　　).

A. x　　B. $2x$　　C. $4x$　　D. x^2

答案：B

解析：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$，

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\frac{1}{2}，\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{x}=\infty.$$

第三节　连　续

内容提要

1. 理解函数在一点处连续与间断的概念，理解函数在一点处连续与极限存在的关系，会判断函数(含分段函数)在一点处的连续性.

2. 会求函数的间断点.

3. 掌握在闭区间上连续函数的性质，会用介值定理推证一些简单的命题.

4. 理解初等函数在其定义区间上的连续性，会利用连续性求极限.

基础知识精讲

一、函数连续与间断的概念

1. 函数在一点处连续的定义

(1)设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的某一邻域内有定义，如果当自变量 x 在 x_0 处取得的增量 Δx 趋于零时，函数相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，则称函数

$f(x)$**在点** x_0 **处连续**.

(2)设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$**在点** x_0 **处连续**.

2. 左连续与右连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某左侧邻域 $(x_0-\delta,\ x_0]$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**左连续**；若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右侧邻域 $[x_0,\ x_0+\delta)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**右连续**.

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，而且在左端点 $x=a$，$f(x)$ 右连续，即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$；在右端点 $x=b$，$f(x)$ 左连续，即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是在 x_0 点既是左连续又是右连续，即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0).$$

定理　基本初等函数在其定义域都是连续函数.

3. 函数的间断点及其分类

(1)函数的间断点.

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不满足连续的条件，即如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一：

①$f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③虽然 $f(x_0)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但是 $f(x)\neq f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点**间断**，$x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的**间断点**.

(2)函数间断点的分类.

若 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，则

①如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，但不相等，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

②如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但与 $f(x_0)$ 不相等或 $f(x_0)$ 无定义，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**. 对于可去间断点，只要改变定义或补充定义，就能使 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

③如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个为 ∞ 时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

④若在 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的值无限次地在两个不同的数之间变化，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

通常我们将函数 $f(x)$ 的可去间断点和跳跃间断点称为第一类间断点，将无穷间断点和振荡间断点称为第二类间断点.

二、函数连续性的运算

1. 连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则它们的和 $(f(x)+g(x))$，差 $(f(x)-g(x))$，积

$(f(x)\cdot g(x))$，商$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)\right)$在点 x_0 处也连续.

2. 复合函数的连续性

设 $y=f(u)$在 $u=u_0$ 处连续，$u=\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 $x=x_0$ 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

注意： 若 $\varphi(x)$在 $x=x_0$ 点不连续，但 $\varphi(x)$存在，则通过补充定义可使 $\varphi(x)$在此点连续，从而上式仍成立.

3. 反函数的连续性

设函数 $y=f(x)$在某区间上连续且为严格单调函数，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$也在对应区间上连续，且严格单调.

三、闭区间上连续函数的性质

1. 有界性定理

设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界，即存在常数 $M>0$，对任意的 $x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leqslant M$.

2. 最大值与最小值定理

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上，$f(x)$必然存在最大值与最小值.

3. 介值定理(包括零点定理)

(1)介值定理.

设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在该区间端点处取值不同时，即 $f(a)=A$，$f(b)=B$，且 $A\neq B$，那么，不论 C 是 A 与 B 之间的怎样一个数，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

(2)零点定理.

设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那么在开区间(a,b)内至少有函数 $f(x)$的一个零点，即至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

典型例题解析

一、讨论分段函数在分段点的连续性

分两种情形：已知分段函数，研究其在分段点的连续性；已知分段函数在分段点连续，求分段函数关系式中的参数.

方法： 在分段点 x_0 处连续，则既是左连续，又是右连续，即 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 画出 $f(x)$的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？

解： $f(x)$的图像如图 1-2 所示.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

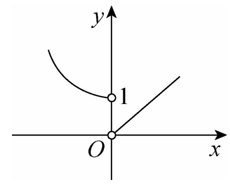

图 1-2

二、确定函数的间断点并进行分类

函数 $y=f(x)$的间断点，是指满足下列三个条件之一的点：

(1)$f(x)$在点 x_0 处无定义；

(2)在 x_0 点$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

(3)在 x_0 点$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

求函数 $y=f(x)$的间断点也就是寻找满足三个条件之一的点.

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}$的间断点，并判断其类型.

解：由使函数 $f(x)$有意义知 $f(x)$的间断点为 $x=0$，$x=1$.

因为$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=2$，而 $f(x)$在 $x=1$ 处无定义，故 $x=1$ 为可去间断点.

又因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$的无穷间断点.

综上得 $x=1$ 为 $f(x)$的可去间断点，$x=0$ 为 $f(x)$的无穷间断点.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$的间断点，并确定其类型.

解：所给函数在点 $x=-1$，2 处没有意义，因此 $x=-1$，2 是所给函数的间断点.

由于在 $x=-1$点有

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{3},$$

故 $x=-1$ 是第一类间断点且为可去间断点.

在 $x=2$ 点有$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}=\infty$,

故 $x=2$ 是第二类间断点且为无穷间断点.

三、利用函数的连续性求极限

设 $u=\varphi(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，而函数 $y=f(u)$在点 $u=A$ 处连续，则由复合函数的连续性可证

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(A).$$

注意：这里并不要求 $\varphi(x)$在 $x=x_0$点连续，只要极限$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$存在即可.

由此可进一步推导出：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A>0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B.$$

例 4　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解：由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

而函数 $y=\ln u$ 在 $u=\dfrac{1}{2}$处连续，

从而$\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right]=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln2$.

四、有关闭区间上连续函数的命题的证明

这里主要是指利用介值定理及其推论、根的存在性定理证明方程根的存在性．其基本步骤是：把已知方程右端项全部移到左端，令其为 $f(x)$，再由题设确定区间$[a,b]$，然后验证 $f(a)\cdot f(b)<0$ 即可推证在 a 与 b 之间至少存在一个根.

例 5　试证方程 $e^x-2=x$ 在区间$(0,2)$内至少有一个根.

证明：令 $f(x)=e^x-2-x$，则 $f(x)$在$[0,2]$上连续，且 $f(0)=e^0-2-0=-1<0$，$f(2)=e^2-2-2=e^2-4>0$．由零点定理知，在$(0,2)$内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

即 $e^\xi-2=\xi$，也就是说方程 $e^x-2=x$ 在区间$(0,2)$内至少有一个根.

例 6　证明方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的正实根.

证明：令 $f(x)=x-\sin x-2$，则 $f(0)=-2<0$，$f(3)=1-\sin3>0$，

故由零点定理知，在$(0,3)$内至少有一个根使得方程 $f(x)=0$ 成立．即方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正实根.

习题一

一、选择题

1. 当 $x\to0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的　　　　(　　)

A. 高阶无穷小　　　　B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小，但不是等价无穷小　　　　D. 低阶无穷小

2. 当 $x\to0$ 时，下列函数为无穷小的是　　　　(　　)

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　　　B. $x^2+\sin x$

C. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$　　　　D. $2x-1$

3. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=e^{-x^2+2x^3}-1$ 与 $g(x)=x^2$ 比较得　　　　(　　)

A. $f(x)$是较 $g(x)$高阶的无穷小量

B. $f(x)$是较 $g(x)$低阶的无穷小量

C. $f(x)$与 $g(x)$是同阶无穷小量，但不是等价无穷小量

D. $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小量

4. 函数 $y=\dfrac{1}{x}\ln(2+x)$的定义域为　　　　(　　)

A. $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$　　B. $x>0$

C. $x>-2$　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$

5. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=$　　(　　)

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

6. 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ e^x-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的　　(　　)

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 第二类间断点　　D. 第一类间断点，但不是可去间断点

7. 函数 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处不连续是因为　　(　　)

A. $f(0^+)\neq f(0)$　　B. $f(0^-)\neq f(0)$

C. $f(0^+)$不存在　　D. $f(0^-)$不存在

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$　　(　　)

A. e　　B. e^{-1}　　C. $-e^{-1}$　　D. $-e$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-6x+8}=$　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

10. 函数 $f(x)=|x|+1$ 在 $x=0$ 处　　(　　)

A. 无定义　　B. 不连续

C. 连续　　D. 可去间断点

二、填空题

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(f(x))=$________.

12. 函数 $f(x)=2x^2+3x-12$ 的单调递减区间是________.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}=$________.

14. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0, \\ 2^x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $f(\lim\limits_{x\to 0}f(x))=$________.

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=$________.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=e$，则 $k=$________.

17. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{2x^2}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 为连续函数，则 $a=$________.

18. 设 $f(x)=\begin{cases}1+e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & x\neq 1,\\ k, & x=1,\end{cases}$ 当 $k=$________时，可使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

19. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________.

20. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos x, & x\geqslant 0,\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

三、解答题

21. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \arctan\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点，并确定其类型.

22. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}$.

24. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

25. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)$.

26. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

27. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

28. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

29. 证明方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少存在一个实根.

30. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan(ax)}{x}, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

答案解析

一、选择题

1. C　**解析**：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{\sin x}{x}\right)=-1$，所以当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的同阶无穷小，但不是等价无穷小.

2. B　**解析**：因为$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\sin x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1$，

所以只有 $x^2+\sin x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

3. C　**解析**：$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{e^{-x^2+2x^3}-1}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2+2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(-1+2x)=-1$，

故 $f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量.

4. D　**解析**：要使 $y=\dfrac{1}{x}\ln(2+x)$有意义，必须满足$\begin{cases}x\neq 0,\\2+x>0,\end{cases}$所以 $x>-2$ 且 $x\neq 0$.

5. A　**解析**：当 $x\to\infty$时，$\sin 2x$ 为有界量，$\dfrac{1}{x}$为无穷小量，它们的积仍为无穷小量，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=0$.

注意：此题容易错误地计算为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$.

6. A　**解析**：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. 故 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\e^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的连续点.

7. C　**解析**：$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$不存在.

8. B　**解析**：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\cdot(-1)}=e^{-1}$.

9. C　**解析**：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{2}$，故选 C.

10. C　**解析**：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$f(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，所以函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

二、填空题

11. x　**解析**：$f(f(x))=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$.

12. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)$　**解析**：$f(x)$的对称轴为 $x=-\dfrac{3}{4}$，且函数 $f(x)$为开口向上的二次

函数，则单调递减区间为$\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$.

13. 0　**解析**：$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$.

14. 2　**解析**：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2^x=1$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，则$f(\lim\limits_{x\to0}f(x))=f(1)=2$.

15. $\frac{1}{2}$　**解析**：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

16. $\frac{1}{2}$　**解析**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{2k}=e^{2k}$，要使$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{2x}=e$，

必须 $2k=1$，所以 $k=\frac{1}{2}$.

17. $\frac{1}{2}$　**解析**：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$，则要使 $f(x)$连续，有 $a=\frac{1}{2}$.

18. 1　**解析**：$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}[1+e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}]=1$，要使 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，应有 $k=f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

19. 1　**解析**：因为 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant0,\\ \sqrt{x}, & x>0,\end{cases}$所以 $f(0)=\cos0=1$.

20. -1　**解析**：因为 $f(x)=\begin{cases}a\cos x, & x\geqslant0,\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=a=-1$.

三、解答题

21. **解析**：当 $x\neq0$ 时，$f(x)$在各区间为连续的，当 $x=0$ 时，因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\neq f(0^-)$，所以 $x=0$ 是函数的第一类间断点且为跳跃间断点.

22. **解析**：因为$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{\frac{x}{\sin x}}$，而$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$，故原式$=e^1=e$.

23. **解析**：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{2}+4}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+4}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}+4}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-1}.$$

24. **解**：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=2.$

25. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{2x}=0.$

26. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1.$

27. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1+\dfrac{x}{2}}{1-\dfrac{x}{2}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=e.$

28. **解**：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{2}{3}.$

29. **解**：令 $f(x)=x^3-3x+1$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为连续函数. 由于 $f(1)=-1<0$，$f(2)=3>0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(1,2)$使得 $f(\xi)=0$，即所给方程在区间$(1,2)$内至少有一个实根.

30. **解**：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan(ax)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$，

又因为 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，故 $a=2$.